Intervallo di Confidenza

D.E.I.S. Università di Bologna
DEIS*Net*
http://deisnet.deis.unibo.it/

Introduzione

- Una volta effettuata una simulazione, è necessario stimare la precisione e l'affidabilità dei risultati.
- Si supponga ad esempio di voler valutare il valore medio di un certo indice di prestazione x. x è una variabile aleatoria con valore medio μ e varianza σ^2 .
- Ripetendo n esperimenti di simulazione, per ipotesi statisticamente indipendenti tra loro, si ottengono n osservazioni indipendenti X_1, X_2, ..., X_n.

Valore medio di una grandezza

- Una stima del valor medio μ è data dalla media campionaria

$$\overline{X}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Questo stimatore è anch'esso una variabile aleatoria: ripetendo più volte la simulazione *X(n)* assume valori diversi
- In generale $X(n) \neq \mu$: è necessario valutare l'affidabilità della stima.

  Il metodo dell'intervallo di confidenza consiste nel determinare un *intervallo* attorno al valore *X(n)*, in modo da prevedere con una certa probabilità (detta *confidenza*) che μ cada in questo intervallo.
- Si noti che *X(n)* è uno stimatore non polarizzato di μ, cioè $E\{X(n)\} = \mu$.

Livello di confidenza dello stimatore

- In formule si esprime nel modo seguente

$$P\left\{ \left|\overline{X}(n) - \mu\right| < \delta \right\} = 1 - \alpha$$

dove δ è la semiampiezza dell'intervallo di confidenza:

$$[\overline{X}(n) - \delta ; \overline{X}(n) + \delta]$$

Tipicamente 1 - α vale 0,9 0,95 o 0,99 cioè affidabilità del 90, 95 o 99% rispettivamente.

Varianza campionaria

- Varianza di $\overline{X}(n)$:

  Var {$\overline{X}(n)$} = σ^2/n

  da cui si vede che all'aumentare del numero di campioni la stima della media migliora
- La varianza si può stimare mediante la varianza campionaria $S^2(n)$:

$$S^2(n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[X_i - \overline{X}(n)]^2$$

  Anch'essa è uno stimatore non polarizzato cioè $E\{S^2(n)\} = \sigma^2$
- sostituendo quindi σ^2 con $S^2(n)$ si ha

$$Var[\overline{X}(n)] = S^2(n)/n = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}[X_i - \overline{X}(n)]^2$$

Calcolo di δ

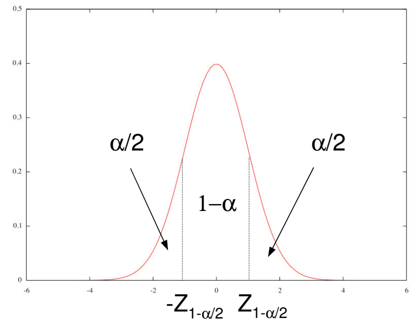
- Se il numero di osservazioni è elevato (n > 30) si può assumere che $\overline{X}(n)$ abbia distribuzione gaussiana (Teo. Limite centrale)
- Si introduce la variabile aleatoria Z_n:

$$Z_n = [\overline{X}(n) - \mu] \big/ \sqrt{\sigma^2/n}$$

  La variabile Z_n ha valor medio nullo e varianza unitaria con distribuzione gaussiana (variabile normale standard).

Calcolo di δ

- Si riporta di seguito la distribuzione di Z_n



Il valore $z_{1-\alpha/2}$ è tale per cui l'integrale della curva fra $-z_{1-\alpha/2}$ e $z_{1-\alpha/2}$ vale $1-\alpha$. Ossia:

$$P\{ -z_{1-\alpha/2} \leq z \leq z_{1-\alpha/2} \} = 1-\alpha$$

Calcolo di δ

- Poiché si suppone n abbastanza grande, si può sostituire nell'espressione di Z_n $S^2(n)$ al posto di σ^2:

$$P\left\{-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}(n)-\mu}{\sqrt{S^2(n)/n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right\} = P\left\{\overline{X}(n) - z_{1-\alpha/2}\sqrt{S^2(n)/n} \leq \mu \leq \overline{X}(n) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{S^2(n)/n}\right\}$$

$$\approx 1-\alpha$$

Il simbolo "≈" indica che questa è un'approssimazione.

- Si ricava quindi la semiampiezza dell'intervallo di confidenza:

$$\delta = z_{1-\alpha/2}\sqrt{S^2(n)/n}$$

T-student

- Se i campioni Xi hanno distribuzione *normale* la variabile
$$t_n = [\overline{X}(n) - \mu] \Big/ \sqrt{S^2(n)/n}$$
ha una distribuzione detta *t di Student a n-1 gradi di libertà* e l'intervallo di confidenza è in questo caso *esattamente* espresso da
$$\delta = t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{S^2(n)/n}$$
e prende il nome di intervallo di confidenza *t.*
- i valori della distribuzione t si trovano tabulati per i diversi valori di n
- in pratica raramente i campioni X_i hanno distribuzione *normale* per cui l'uso dell'intervallo di confidenza t è ancora una approssimazione
- per n tendente all'infinito i valori ottenuti con i due metodi coincidono

Tabella t-student

Si riporta qui a fianco i valori tabulati della distribuzione t-student in funzione del numero di gradi di libertà per un valore 1-α=0.95

n-1	$t_{n-1,1-\alpha/2}$
1	12.706
2	4.303
3	3.182
4	2.776
5	2.571
6	2.447
7	2.365
8	2.306
9	2.262
10	2.228
11	2.201
12	2.179
13	2.160
14	2.145
15	2.131
16	2.120
17	2.110
18	2.101
19	2.093
20	2.086
21	2.080
22	2.074
23	2.069
24	2.064
25	2.060
26	2.056
27	2.052
28	2.048
29	2.045
30	2.042
40	2.021
50	2.009
75	1.992
100	1.984
∞	1.960

Esempio

- Si supponga di aver effettuato 9 esperimenti di simulazione indipendenti da cui si sono misurate 9 stime della variabile casuale X: X1, X2, …., Xn. Sia:

$$\overline{X}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 65$$

$$\sum_{i=1}^{9}\left(X_i - \overline{X}(n)\right)^2 = 3560$$

Si può determinare $S^2(n)$:

$$S^2(n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[X_i - \overline{X}(n)]^2 = \frac{1}{8}\cdot 3560 = 445$$

Esempio

- Scegliendo di determinale l'intervallo di confidenza con livello di confidenza del 95%, cioè 1-α =0.95 si ha:

$$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{8,0.05} = 2.306$$

$$\delta = t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{S^2(n)/n} = 2.306\cdot\sqrt{445/9} = 16.12$$

- L'intervallo di confidenza risulta quindi:

$$[\overline{X}(n)-\delta;\overline{X}(n)+\delta] = [65-16.12;65+16.12] = [48.88;81.12]$$

cioè

$$P\{48.88 \le E[X] \le 81.12\} = 0.95$$

Considerazioni

- Guardando l'espressione dell'intervallo di confidenza:

$$A = 2\delta = 2t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{S^2(n)/n}$$

A parità di altre condizioni:

1. A↓ se n↑: maggiore è n, migliore è l'accuratezza della stima.
2. A↑ se var[X]=σ^2↑: nella formula compare $S^2(n)$ che è una stima di σ^2.
3. A↑ se 1-α ↑ : l'intervallo si allarga all'aumentare del livello di confidenza.